Master Recherche 2016-2017 : Géométrie et Topologie

Pendant le mois de septembre il y aura une semaine de cours “accélérés” pour une mise à niveau.
Les matières abordées seront : (1) algèbre commutative, (2) géométrie différentielle, (3) topologie algébrique, (4) analyse.

Premier trimestre :

Géométrie et Topologie des surfaces.

Le but de ce cours est de donner une introduction à la topologie et la géométrie des surfaces. Il est divisé en trois parties :

• Topologie des surfaces. — Définition, orientation, genre et caractéristique d’Euler, classification. — Groupe fondamental, revêtements, — Homologie, forme d’intersection, cohomologie.

• Géométrie complexe des surfaces, uniformisation. — Définition d’une structure com- plexe, espace tangent et cotangent. — Fonction méromorphe, diviseur, fibré en droites complexes, diviseur canonique et théorème de Riemann-Roch — Matrice des périodes, relations de Hodge-Riemann, Jacobienne et application d’Abel.

• Géométrie hyperbolique des surfaces/ Groupes Fuchsiens. — Le plan hyperbolique — Structure hyperbolique sur une surface, théorème d’uniformisation et groupes Fuchsiens — Espace de Teichmüller.

T. Delzant et V. Fock

Structures géométriques.

Le but du cours est une introduction à l’étude des strctures localement homogènes. L’accent sera mis sur les exemples classiques, comme les structures euclidiennes, affines et projectives. La structure du cours sera la suivante :

• Groupes de Lie. — Notions élémentaires sur les groupes de Lie et leur algèbre de lie associée. — Correspondance entre algèbre de Lie et groupe de Lie. — Notion d’algèbres de Lie semi-simples, résolubles, nilpotentes et théorèmes de structure.

• Structures géométriques — Groupes de Lie agissant sur une variété, notion d’espace homogène. — Structures géométriques invariantes sur les espaces homogènes. — Exemples des géométries classiques : euclidienne, affine, projective....

• Exemples de dynamique sur les espaces homogènes. — Flot géodésique sur les surfaces hyperboliques compactes ; ergodicité. — Flot horocyclique ; théorème de Hedlund.

• (G,X)-structures.—Notionde(G,X)-structure et exemples.—Application développante et morphisme d’holonomie. — Principe de Ehresmann-Thurston.

• Complétude et classification, exemples. — Le théorème de Bieberbach sur les structures euclidiennes. — Complétude de Carrière-Klingler pour les structures lorentziennes.

C. Frances

Deuxième trimestre :

Théorie de Morse et topologie symplectique .

La première partie du cours sera dédiée à la théorie de Morse, une théorie qui permet d'étudier la topologie d'une variété en regardant les points critiques et sous-niveaux d'une fonction définie sur cette variété. En particulier nous appliquerons cette théorie (via la méthodes des géodésiques brisées) au cas de la fonctionnelle d'énergie sur l'espace des lacets d'une variété riemannienne, et obtiendrons comme application les théorèmes d'Hadamard et (à l'aide aussi d'une méthode de minimax) de Lyusternik-Fet sur l'existence de géodésiques fermées.

Dans la deuxième partie du cours nous verrons des applications de la théorie de Morse à la topologie symplectique. Après avoir étudié quelques notions de base de la topologie symplectique (variétés symplectiques, sous-variétés lagrangiennes, isotopies hamiltoniennes, actions hamiltoniennes et réduction symplectique, etc.) nous introduirons les fonctions génératrices, un outil qui nous permettra de démontrer certains résultats profonds dans ce sujet.

Notre but principal sera de voir la preuve de la conjecture d'Arnold sur les intersections lagrangiennes dans l'espace cotangent d'une variété compacte, en utilisant une version symplectique (due à Chaperon, Laudenbach et Sikorav) de la méthode des géodésiques brisée. Si le temps le permet, nous utiliserons aussi les fonctions génératrices pour démontrer (d'après Chaperon et Théret) la conjecture d'Arnold sur les points fixes des symplectomorphismes hamiltoniens pour le tore et l'espace projectif, et pour definir avec une méthode de minimax une capacité symplectique (d'après Viterbo) et obtenir ainsi une preuve du théorème de non–squeezing de Gromov.

M. Sandon

Sous-groupes discrets des groupes de Lie.

Le cours est divisé en trois parties :

• Réseaux. — SL(2, Z), SL(n, Z), groupes arithmétiques. — Rigidité de Weil, de Mostow et de Margulis. — Théorème de Howe-Moore, mélange, équirépartition. — Frontières, théorie de Furstenberg. — Zariski-densité des réseaux.

• Sous-groupes Zariski-denses. — Ensemble limite, cône limite. — Existence d'éléments réguliers, théorème de Prasad et Rapinchuk. — Exemples.

• Groupes convexe-cocompacts.—Caractérisations géométriques,dynamiques et métriques. — Théorème de stabilité de Sullivan. — Généralisations en rang supérieur.

O. Guichard

Connexions et structures géométriques sur les espaces homogènes.

1. Rappel des variétés différentiables, variétés fibrées (submersions surjectives), fibrés vectoriels, définition d'une connexion et d'une dérivée covariante, exemples.

2. BrefrappeldesgroupesdeLie,algèbresdeLie,actionsdesgroupesdeLiesous-groupes fermés, espaces homogènes G/H, exemples.

3. Fibrésprincipaux,fibrésdesrepères,fibrésassociés,descriptiondesfibrésG-équivariants sur G/H en tant que fibrés associés.

4. Définition de la cohomologie de Chevalley-Eilenberg (des algèbres de Lie) et de la cohomologie lisse des groupes de Lie (...)

5. Définition de la classe d'Atiyah (Nguyen-Van Hai) d'un triplet (g, h, f , u) où h est une sous-algèbre de l'algèbre de Lie g et f : h → u est un morphisme d'algèbres de Lie.

6. Description des connexions G-équivariantes sur des espaces homogènes (obstruction : classe d'Atiyah).

7. Structures géométriques G-équivariantes sur des espaces homogènes et certaines structures algébriques sur des couples d'algèbres de Lie (g, h), dont • algèbres pré-Lie (symétriques à gauche) = connexions G-invariantes plates sans torsion • structures ternaires comme systèmes triples de Lie = espaces symétriques

8. Structures symplectiques sur G/H et orbites coadjointes. • Calcul de certaines orbites pour des produits semi-directs, étude de certains systèmes hamitoniens (toupies, éventuelle- ment intégrables). • algèbres de Lie symplectiques et r-matrices classiques. • groupes de Lie-Poisson.

M. Bordemann et A. Makhlouf (LMIA Mulhouse)